

ŽUPANIJSKO NATJECANJE IZ FIZIKE

3. SKUPINA ZADATAKA

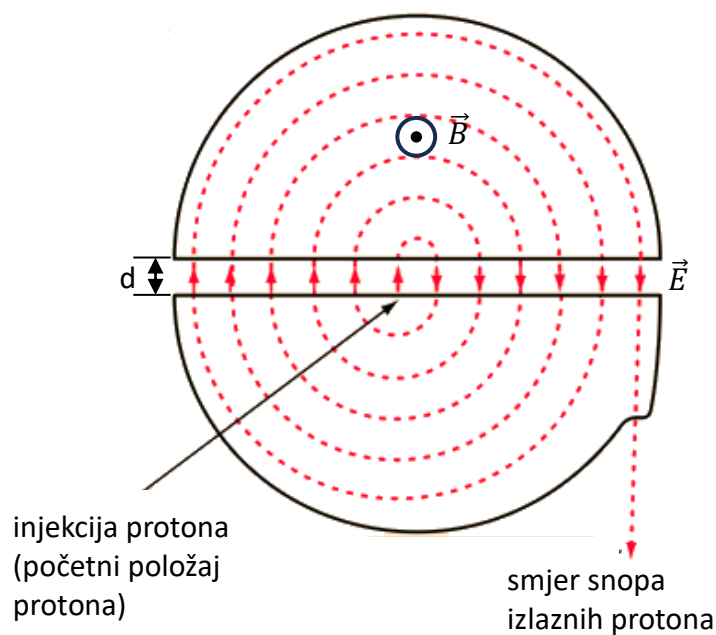
ŠKOLSKA GODINA 2025./2026.

Zadatak 1. (10 bodova)

Ciklotron je uređaj koji se u fizici često upotrebljava za ubrzanje nabijenih čestica poput protona pomoću električnog i magnetskog polja. Sastoji se od dviju polukružnih polutki u kojima djeluje homogeno magnetsko polje i prostora između polutki u kojemu djeluje samo homogeno električno polje (vidi sliku). Magnetsko polje u polutkama okomito je na ravninu polutki i na smjer gibanja nabijene čestice. Električno polje između polutki paralelno je sa smjerom gibanja nabijene čestice kada ona uleti u prostor s električnim poljem (smjer električnog polja prikazan je na slici dolje).

Proton ulijeće u ciklotron bez početne brzine u prostor s električnim poljem kako je prikazano na slici. U polutkama polumjera $R = 1\text{ m}$ magnetsko je polje $B = 0.1\text{ T}$. Razmak između polutki iznosi $d = 5\text{ cm}$, dok je električno polje $E = 2\text{ kV/m}$. Zanemarite relativističke efekte.

- Koliko iznosi energija protona nakon što izleti iz ciklotrona?
- Koliko krugova proton napravi prije nego što napusti ciklotron?
- Koliko iznosi srednja brzina protona u prvom krugu i koliko vremena protonu treba za prvi krug?

**Rješenje:**

U prostor između polutki proton uvijek ulazi brzinom paralelnom sa smjerom električnog polja te se ubrzava. U prostoru polutki smjer brzine uvijek je okomit na smjer magnetskog polja, pa proton ne ubrzava, već samo mijenja smjer gibanja, i to tako da izvodi kružno gibanje. U svakoj polutci proton izvede jedno polukružno gibanje.

Ukoliko proton uleti u prostor polutke gdje djeluje magnetsko polje B brzinom v , sila na proton iznosi:

$$\vec{F} = q(\vec{v} \times \vec{B})$$

gdje je $q = +e$ naboj protona.

S obzirom na orijentaciju magnetskog polja i brzine, te zanemarujući predznak, sila na proton iznosi:

$$F = evB$$

Sila je uvijek usmjerena okomito na smjer gibanja, pa mijenja samo smjer, a ne i iznos gibanja. Proton mase m giba se po kružnoj putanji polumjera r , a gornja sila odgovara centripetalnoj sili:

$$F_c = \frac{mv^2}{r} = evB$$

$$\frac{mv}{r} = eB$$

1 bod

Nakon svakog prolaska kroz jednu od dviju polutki proton se ubrzava u električnom polju i povećava polumjer svoje kružne putanje. Najveća kružna putanja koju proton može imati, a nakon koje izlazi iz ciklotrona, odgovara polumjeru R ciklotrona. Njegova je maksimalna brzina tada ($r = R$):

$$\frac{mv_{max}}{R} = eB$$

Maksimalna brzina protona iznosi:

$$v_{max} = \frac{eBR}{m}$$

Energija protona, kada izleti iz ciklotrona, odgovarat će kinetičkoj energiji protona koji se giba brzinom v_{max} :

$$E_{kin} = \frac{1}{2}mv_{max}^2$$

$$E_{kin} = \frac{1}{2} \frac{m(eBR)^2}{m^2}$$

$$E_{kin} = \frac{(eBR)^2}{2m} = 7.67 \cdot 10^{-14} \text{ J} = 479 \text{ keV}$$

1 bod

U jednom polukružnom gibanju proton će jednom proći kroz prostor između polutki, u kojemu se ubrzava u električnom polju E . Razlika potencijala (napon) U u kojemu se proton ubrzava iznosi:

$$U = Ed$$

1 bod

gdje je d razmak između polutki, odnosno put koji proton prijeđe u električnom polju.

Svakim prolaskom kroz prostor s električnim poljem proton dobije energiju $E_{1/2}$:

$$E_{1/2} = qU = eEd$$

Proton u jednom krugu dva puta prolazi kroz prostor s električnim poljem i u svakom krugu dobije energiju $2E_{1/2}$. Nakon n krugova proton izlijeće iz ciklotrona i ima energiju E_{kin} :

$$E_{kin} = 2nE_{1/2} = 2n \cdot eEd$$

1 bod

Konačno, broj krugova protona odredimo kao:

$$\frac{(eBR)^2}{2m} = 2neEd$$

$$n = \frac{e(BR)^2}{4mEd} = 2393 \quad 1 \text{ bod}$$

Primijetimo iz uvodne slike da broj krugova protona treba biti cijeli broj.

U prvom krugu proton prođe dva puta kroz prostor s električnim poljem, gdje se ubrzava s početne brzine 0 na konačnu brzinu v_1 , odnosno s početne brzine v_1 na konačnu brzinu v_2 . Uz udaljenost $2d$ proton u prvom krugu prođe polovicu opsega kruga polumjera r_1 brzinom v_1 i polovicu opsega kruga polumjera r_2 brzinom v_2 . U prolasku kroz prostor s električnim poljem E proton se svaki put ubrzava pod utjecajem električne sile:

$$F_{el} = qE = eE$$

Uz primjenu Newtonova zakona:

$$F_{el} = am$$

dobijemo ubrzanje protona u električnom polju:

$$am = eE$$

$$a = \frac{eE}{m} \quad 1 \text{ bod}$$

Proton na prvom izlasku iz područja s električnim poljem ima brzinu v_1 :

$$v_1^2 = 2ad = \frac{2eEd}{m}$$

$$v_1 = \sqrt{\frac{2eEd}{m}} \quad 0.5 \text{ boda}$$

Proton na drugom izlasku iz područja s električnim poljem ima brzinu v_2 (kao da se ubrzavao na putu $2d$):

$$v_2^2 = 4ad = \frac{4eEd}{m}$$

$$v_2 = \sqrt{\frac{4eEd}{m}} \quad 0.5 \text{ boda}$$

U prvom polukrugu u kojemu se kreće brzinom v_1 , proton izvodi kružnu putanju polumjera r_1 :

$$\frac{mv_1}{r_1} = eB$$

$$r_1 = \frac{mv_1}{eB} = \frac{m}{eB} \sqrt{\frac{2eEd}{m}} = \frac{1}{B} \sqrt{\frac{2mEd}{e}} \quad 0.5 \text{ boda}$$

U prvom polukrugu u kojemu se kreće brzinom v_2 , proton izvodi kružnu putanju polumjera r_2 :

$$\frac{mv_2}{r_2} = eB$$

$$r_2 = \frac{mv_2}{eB} = \frac{m}{eB} \sqrt{\frac{4eEd}{m}} = \frac{1}{B} \sqrt{\frac{4mEd}{e}}$$

0.5 boda

Vrijeme t_0 koje proton provede u području električnog polja u jednom krugu (dva puta prolazi kroz to područje) iznosi:

$$2d = \frac{at_0^2}{2} = \frac{eE}{2m} t_0^2$$

$$t_0 = \sqrt{\frac{4md}{eE}}$$

0.5 boda

Vrijeme t_1 koje proton provede na polukružnoj putanji polumjera r_1 brzinom v_1 :

$$v_1 = \frac{s_1}{t_1} = \frac{2r_1\pi}{2} \cdot \frac{1}{t_1} = \frac{r_1\pi}{t_1}$$

$$t_1 = \frac{r_1\pi}{v_1} = \frac{m\pi}{B} \sqrt{\frac{2Ed}{em}} \sqrt{\frac{m}{2eEd}} = \frac{m\pi}{eB}$$

Vrijeme koje proton provede na polukružnoj putanji uvijek je isto i ovisi samo o magnetskom polju. Prema tome, ukupno vrijeme koje proton provede na polukružnim putanjama r_1 i r_2 u prvom krugu iznosi:

$$t_1 + t_2 = \frac{2\pi m}{eB}$$

0.5 boda

Ukupno vrijeme za prvi krug protona iznosi:

$$t_{UK} = t_0 + t_1 + t_2 = \sqrt{\frac{4md}{eE}} + \frac{2\pi m}{eB} = 1.678 \cdot 10^{-6} \text{ s}$$

Ukupan put koji je proton prešao iznosi:

$$s_{UK} = 2d + r_1\pi + r_2\pi$$

$$s_{UK} = 2d + \frac{\pi}{B} \sqrt{\frac{2mEd}{e}} (\sqrt{2} + 1) = 0.2096 \text{ m}$$

Srednja brzina protona u prvom krugu iznosi:

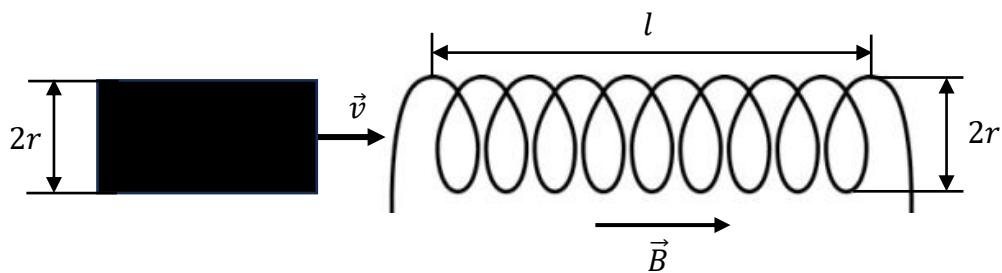
$$\bar{v} = \frac{s_{UK}}{t_{UK}} = 124.9 \text{ km/s}$$

1 bod

Zadatak 2. (10 bodova)

Idealna zavojnica polumjera $r = 10 \text{ cm}$ i duljine 1 m sastoji se od 500 zavoja u jednom sloju. Zavojnica se nalazi u homogenom paralelnom magnetskom polju $B = 0.1 \text{ T}$ usmjerenom uzduž osi zavojnice (vidi sliku). U zavojnicu započinjemo uvlačiti feromagnetsku jezgru u obliku cilindra duljine 50 cm te istog polumjera kao što je polumjer zavojnice. Feromagnetnu jezgru relativne permeabilnosti $\mu_r = 100$ uvlačimo konstantnom brzinom 0.1 m/s u smjeru paralelnom s osi zavojnice. Zanimajte rubne efekte. Pretpostavite da je magnetsko polje jezgre prisutno samo u jezgri i da iščezava izvan jezgre, te je unutar jezgre svugdje homogeno i paralelno s vanjskim poljem.

- Koliki se napon inducira u zavojnici u prvoj sekundi uvlačenja jezgre?
- Nacrtajte graf ovisnosti napona o vremenu za prvih 15 s (jezgru ste cijelu provukli kroz zavojnicu).

**Rješenje:**

Inducirani napon u zavojnici ovisit će o brzini promjene magnetskog toka (zanemarimo predznak):

$$U = \frac{\Delta\Phi}{\Delta t}$$

Magnetski tok mijenja se uslijed uvlačenja feromagnetske jezgre zbog promjene magnetskog polja. Magnetsko polje bez jezgre iznosi B , dok je s prisutnom jezgrom magnetsko polje pojačano na $\mu_r B$. Promjena magnetskog polja stoga je:

$$\Delta B = \mu_r B - B = B(\mu_r - 1) \quad 1 \text{ bod}$$

Vidimo da se magnetsko polje mijenja po cijelom poprečnom presjeku zavojnice:

$$A = r^2 \pi$$

gdje je r polumjer zavojnice.

Promjena magnetskog toka po petlji jednog zavoja zavojnice iznosi:

$$\Delta\Phi = \Delta(BA) = A \cdot \Delta B \quad 1 \text{ bod}$$

s obzirom na to da se površina zavojnice ne mijenja.

Potrebno je još izračunati u koliko zavoja dolazi do promjene magnetskog polja uslijed uvlačenja jezgre brzinom v . Ako zavojnica ima duljinu $l = 1 \text{ m}$ sa $N = 500$ zavoja koji su namotani u jedan sloj, tada je debljina svakog zavoja:

$$d_1 = \frac{l}{N}$$

U vremenu Δt jezgra se uvukla u zavojnicu za dužinu:

$$\Delta s = v \cdot \Delta t \quad 1 \text{ bod}$$

odnosno prošla je kroz poprečni presjek ΔN zavoja:

$$\Delta N = \frac{\Delta s}{d_1} = \frac{vN \cdot \Delta t}{l} \quad 1 \text{ bod}$$

Promjenu toka trebamo pomnožiti s brojem zavoja u kojima je u vremenu Δt došlo do promjene magnetskog polja:

$$\begin{aligned} U &= \frac{\Delta \Phi}{\Delta t} = A \cdot \Delta N \cdot \frac{\Delta B}{\Delta t} = A \cdot \frac{vN \cdot \Delta t}{l} \cdot \frac{\Delta B}{\Delta t} \\ U &= r^2 \pi \cdot \frac{vN}{l} \cdot B(\mu_r - 1) \\ U &= \frac{r^2 \pi v N B (\mu_r - 1)}{l} \quad 1 \text{ bod} \end{aligned}$$

- a) U prvoj sekundi još nije sva jezgra uvučena u zavojnicu, pa je inducirani napon:

$$U = \frac{r^2 \pi v N B (\mu_r - 1)}{l} = 15.55 \text{ V} \quad 1 \text{ bod}$$

- b) Napon se inducira sve dok se mijenja magnetski tok, odnosno dok se jezgra uvlači u zavojnicu. Kada je jezgra u potpunosti uvučena u zavojnicu, magnetski tok se ne mijenja, pa je inducirani napon jednak nuli. To se događa sve dok jezgra ne počne izlaziti iz zavojnice. Odredimo trenutak kada je jezgra u potpunosti u zavojnici:

$$t_1 = \frac{l_{Fe}}{v} = 5 \text{ s}$$

gdje je $l_{Fe} = 50 \text{ cm}$ dužina jezgre. U vremenu od $t_0 = 0 \text{ s}$ do $t_1 = 5 \text{ s}$ inducirani napon je stoga $U_1 = 15.55 \text{ V}$. 1 bod

Jezgra dosegne drugi kraj zavojnice u trenutku:

$$t_2 = \frac{l}{v} = 10 \text{ s}$$

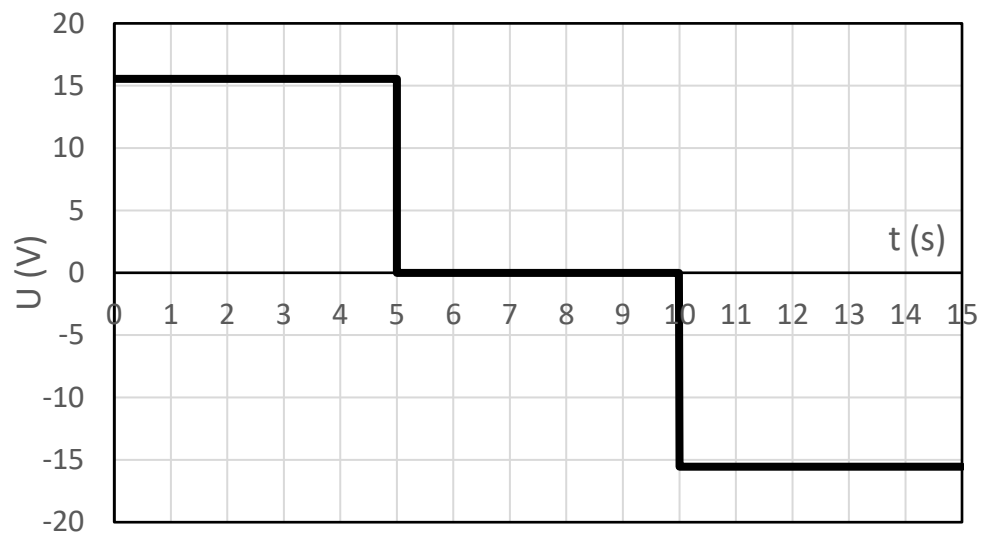
i u intervalu od $t_1 = 5 \text{ s}$ do $t_2 = 10 \text{ s}$ inducirani napon iznosi $U_2 = 0 \text{ V}$. 1 bod

Kada jezgra započne izlaziti iz zavojnice, magnetski se tok smanjuje, a inducirani napon jednak je kao na početku, ali suprotnog predznaka sve dok jezgra ne izađe u potpunosti iz zavojnice u trenutku:

$$t_3 = \frac{l + l_{Fe}}{v} = 15 \text{ s}$$

U intervalu od $t_2 = 10 \text{ s}$ do $t_3 = 15 \text{ s}$ inducirani napon iznosi $U_3 = -15.55 \text{ V}$ 1 bod

NAPOMENA: Zadatak priznati i ukoliko je učenik napisao i nacrtao napone suprotnih predznaka ($U_1 = -15.55 \text{ V}$ i $U_3 = 15.55 \text{ V}$). Važno je da su U_1 i U_3 međusobno suprotni.

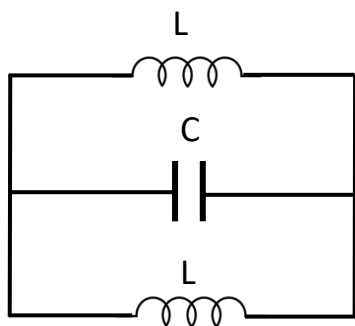


1 bod

Zadatak 3. (10 bodova)

Kondenzator $C = 1.5 \mu\text{F}$ nabijemo vanjskim izvorom na napon $U_0 = 10 \text{ V}$ i zatim ga priključimo u trenutku $t = 0$ u idealni LC električni titrajni krug na slici. Prikazane su zavojnice jednake, a svaka je induktiviteta $L = 120 \text{ mH}$.

- Kojom frekvencijom titra ovaj LC krug?
- Nakon koliko će se vremena kondenzator isprazniti?
- U kojemu će trenutku struja kroz zavojnice biti maksimalna i koliko ta struja iznosi?
- Koliko iznosi maksimalna energija magnetskog polja svake zavojnice?

**Rješenje:**

Kako bismo riješili električni titrajni krug, potrebno je odrediti frekvenciju električnih titraja. Primijetimo da su zavojnice spojene paralelno, pa se problem može svesti na jednostavni serijski LC krug koji će titrati frekvencijom:

$$f_0 = \frac{1}{2\pi\sqrt{L_{eq}C}} \quad 1 \text{ bod}$$

gdje je L_{eq} ekvivalentni induktivitet dviju paralelno spojenih zavojnica:

$$\frac{1}{L_{eq}} = \frac{1}{L} + \frac{1}{L} = \frac{2}{L}$$

$$L_{eq} = \frac{L}{2} = 60 \text{ mH} \quad 1 \text{ bod}$$

Frekvencija LC kruga je:

$$f_0 = \frac{1}{2\pi\sqrt{L_{eq}C}} = \frac{\sqrt{2}}{2\pi\sqrt{LC}} = 530.5 \text{ Hz} \quad 1 \text{ bod}$$

Električni krug simetričan je s obzirom na kondenzator, što znači da će priključenjem nabijenog kondenzatora u krug započeti teći jednaka struja kroz obje zavojnice, koja je jednaka polovici struje kojom se izbija kondenzator. Bez prisutnosti zavojnica kondenzator bi se izbilo, no struja kroz zavojnicu inducirat će napon kojim će se kondenzator nabiti na isti početni napon, ali suprotnog predznaka.

Naponi na zavojnicama i kondenzatoru su jednaki i suprotni, a mijenjaju se kao:

$$U_C = -U_L = U_0 \cos(2\pi f_0 t)$$

Kondenzator će se isprazniti nakon vremena

$$t = \frac{T}{4} = \frac{1}{4f_0} = 0.471 \text{ ms} \quad 1 \text{ bod}$$

Struja kroz zavojnice bit će maksimalna kada je kondenzator ispražnjen i njegova je energija jednaka nuli, te je sva energija sadržana u zavojnici. To se zbiva u trenutku

$$t = \frac{T}{4} = \frac{1}{4f_0} = 0.471 \text{ ms} \quad 2 \text{ boda}$$

Iznos maksimalne struje možemo odrediti iz zakona očuvanja energije, čime ćemo odrediti i maksimalnu energiju magnetskog polja svake zavojnice. U početnom trenutku sva je energija sadržana u kondenzatoru, $\frac{1}{2}CU^2$, dok je u trenutku kada je kondenzator izbijen sva energija sadržana u dvije zavojnice, $2 \cdot \frac{1}{2}LI^2$:

$$\frac{1}{2}CU^2 = 2 \cdot \frac{1}{2}LI^2 \quad 2 \text{ boda}$$

Maksimalna energija zavojnice iznosi:

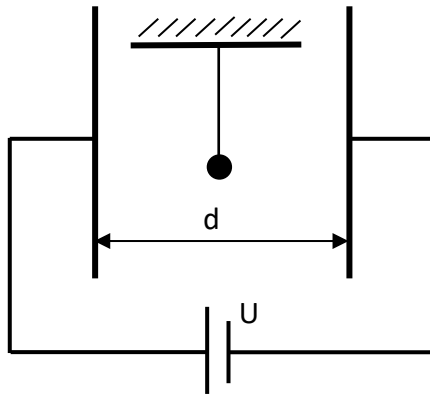
$$\frac{1}{2}LI^2 = \frac{1}{4}CU^2 = 3.75 \cdot 10^{-5} \text{ J} \quad 1 \text{ bod}$$

Maksimalna je struja:

$$I = U \sqrt{\frac{C}{2L}} = 25 \text{ mA} \quad 1 \text{ bod}$$

Zadatak 4. (10 bodova)

Kuglica mase 20 g obješena je o nit nepoznate duljine i njiše se kao matematičko njihalo. Takvo matematičko njihalo nalazi se između dviju suprotno nabijenih paralelnih metalnih ploča razmaknutih 10 cm i spojenih na neki napon U . Dok je napon isključen, kuglica se njiše s periodom 0.9 s. Kada uključimo napon 10 V, period se skрати za 0.05 s. Odredite naboj na kuglici. Za dobiveni naboj i pri uključenom naponu odredite za koji će se ravnotežni kut otkloniti kuglica kada se ne njiše.

**Rješenje:**

Dok je napon isključen, na kuglicu djeluje samo sila teža, zbog čega njiše s periodom

$$T_0 = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}} \quad 1 \text{ bod}$$

Iz čega možemo dobiti duljinu njihala:

$$l = \frac{gT_0^2}{4\pi^2} = 20.13 \text{ cm}$$

Uključimo li napon U , u prostoru između ploča javit će se električno polje:

$$E = \frac{U}{d} \quad 0.5 \text{ bod}$$

Električno polje djelovat će na kuglicu naboja q silom

$$F_{el} = qE = \frac{qU}{d} \quad 0.5 \text{ bod}$$

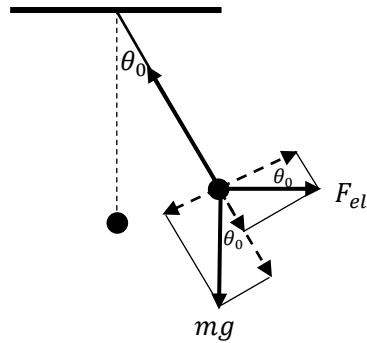
koja je uvijek okomita na silu težu.

U ravnotežnom položaju kuglica će biti otklonjena za kut θ_0 uslijed djelovanja električne sile (vidi sliku). Komponenta električne sile $F_{el} \cos \theta_0$ mora biti uravnotežena komponentom djelovanja sile teže $mg \sin \theta_0$:

$$qE \cos \theta_0 = mg \sin \theta_0 \quad 1 \text{ bod}$$

Kut otklona u ravnoteži u odnosu na vertikalni položaj iznosi:

$$\text{tg } \theta_0 = \frac{qE}{mg} = \frac{qU}{mgd} \quad 1 \text{ bod}$$



Zarotiramo li sustav za ovaj kut θ_0 , rezultantna sila opet djeluje vertikalno prema dolje kao i kod klasičnog matematičkog njihala, ali sada s ubrzanjem:

$$g'^2 = g^2 + a^2 \quad 1 \text{ bod}$$

gdje je a ubrzanje uslijed djelovanja električne sile. Prema Newtonovu zakonu:

$$F_{el} = am = \frac{qU}{d}$$

dobijemo za ubrzanje električne sile:

$$a = \frac{qU}{md} \quad 1 \text{ bod}$$

Novi period matematičkog njihala bit će sada:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g'}} \quad 1 \text{ bod}$$

Za odrediti naboj q na kuglici, potrebno je iz gornje jednadžbe odrediti g' :

$$g' = \frac{4\pi^2 l}{T^2} \quad 1 \text{ bod}$$

$$g'^2 = g^2 + a^2 = g^2 + \left(\frac{qU}{md}\right)^2$$

$$\left(\frac{qU}{md}\right)^2 = \left(\frac{4\pi^2 l}{T^2}\right)^2 - g^2$$

Konačno dobijemo:

$$q = \frac{md}{U} \cdot \sqrt{\left(\frac{4\pi^2 l}{T^2}\right)^2 - g^2}$$

$$q = \frac{md}{U} \cdot \sqrt{\left(\frac{4\pi^2 g T_0^2}{T^2} \frac{T_0^2}{4\pi^2}\right)^2 - g^2}$$

$$q = \frac{md}{U} \cdot \sqrt{\left(\frac{g T_0^2}{T^2}\right)^2 - g^2} = \frac{md}{U} \cdot \sqrt{g^2 \left(\frac{T_0}{T}\right)^4 - g^2}$$

$$q = g \frac{md}{U} \sqrt{\left(\frac{T_0}{T}\right)^4 - 1} = 9.94 \cdot 10^{-4} \text{ C} \quad 1 \text{ bod}$$

Kut odklona u ravnotežnom položaju u odnosu na vertikalu s uključenim naponom:

$$\begin{aligned}\operatorname{tg} \theta_0 &= 0.507 \\ \theta_0 &= 26.88^\circ\end{aligned}$$

1 bod

Zadatak 5. (10 bodova)

Na primar transformatora spojen je izvor napona gradske mreže ($U_{eff} = 230 \text{ V}$, $f = 50 \text{ Hz}$). Na sekundar transformatora serijski su spojeni zavojnica induktiviteta $L = 30 \text{ mH}$ i otpornik trošila $R = 500 \Omega$. Za potpun opis realnog transformatora pretpostavite da je na primar transformatora serijski spojen otpornik $R_1 = 130 \Omega$ koji odgovara otporu žica primarnog navoja (uključujući i ekvivalentne gubitke u željeznoj jezgri), dok je na sekundar serijski spojen otpornik $R_2 = 20 \Omega$ koji odgovara otporu žica u sekundaru. Primar transformatora čini 2000 zavoja, a sekundar ima 500 zavoja. Pretpostavite da su svi otpori i reaktancije takve da su svi naponi i struje, i na primaru i na sekundaru, iste faze. Koliko iznosi unutarnji otpor spojene zavojnice ako se na otporniku trošila troši $P = 5.5 \text{ W}$ snage?

Rješenje.

Zbog gubitaka u transformatoru koje možemo prikazati serijski spojenim otpornikom R_1 , napon na primaru idealnog transformatora umanjen je i iznosi ($U_0 = U_{eff} = 230 \text{ V}$):

$$U_1 = U_0 - I_1 R_1 \quad 1 \text{ bod}$$

Na sekundaru idealnog transformatora napon iznosi:

$$\frac{U_1}{U_2} = \frac{N_1}{N_2} = 4 \quad 1 \text{ bod}$$

Impedancija sekundarnog kruga iznosi:

$$Z_2 = \sqrt{(R_2 + R_L + R)^2 + (\omega L)^2} \quad 1 \text{ bod}$$

Primijetimo da je $\omega L \ll R_2 + R$, odnosno da je pomak u fazi

$$\phi \leq \arctan \frac{\omega L}{R_2 + R} = 1.04^\circ$$

što znači da su struja i napon u sekundarnom krugu približno u fazi kako je i navedeno u pretpostavci zadatka.

Prema tome, možemo jednostavnije pisati za struju u sekundarnom krugu:

$$I_2 = \frac{U_2}{Z_2} \quad 1 \text{ bod}$$

Pad napona na trošilu iznosi:

$$U = I_2 R$$

pa je snaga razvijena na trošilu:

$$P = UI_2 = I_2^2 R = U_2^2 \frac{R}{Z_2^2} \quad 1 \text{ bod}$$

Za idealni transformator vrijedi za primar i sekundar:

$$P_1 = P_2$$

$$U_1 I_1 = U_2 I_2$$

$$\frac{I_2}{I_1} = 4 \quad 1 \text{ bod}$$

Preostaje nam riješiti sustav jednačbi za dobiti U_2 :

$$\begin{aligned} U_1 &= U_0 - I_1 R_1 \\ U_2 &= I_2 Z_2 \\ U_1 &= 4U_2 \\ I_2 &= 4I_1 \end{aligned} \quad 1 \text{ bod}$$

Nadalje:

$$\begin{aligned} 4U_2 &= U_0 - I_1 R_1 \\ U_2 &= 4I_1 Z_2 \end{aligned}$$

Konačno

$$4U_2 = U_0 - \frac{U_2 R_1}{4Z_2}$$

pa za U_2 dobijemo:

$$\begin{aligned} U_2 \left(4 + \frac{R_1}{4Z_2} \right) &= U_0 \\ U_2 \left(\frac{16Z_2 + R_1}{4Z_2} \right) &= U_0 \\ U_2 &= U_0 \left(\frac{4Z_2}{16Z_2 + R_1} \right) \end{aligned} \quad 1 \text{ bod}$$

Uvrstimo u izraz za snagu i dobijemo:

$$P = U_0^2 \frac{16Z_2^2}{(16Z_2 + R_1)^2} \frac{R}{Z_2^2}$$

$$P = U_0^2 \frac{16R}{(16Z_2 + R_1)^2}$$

$$16Z_2 + R_1 = 4U_0 \sqrt{\frac{R}{P}}$$

$$Z_2 = \frac{U_0}{4} \sqrt{\frac{R}{P}} - \frac{R_1}{16} = 540.116 \, \Omega \quad 1 \text{ bod}$$

Konačno:

$$Z_2^2 = (R_2 + R_L + R)^2 + (\omega L)^2$$

$$R_L = \sqrt{Z_2^2 - (\omega L)^2} - R_2 - R$$

$$R_L = 20.03 \, \Omega$$

1 bod