ŽUPANIJSKO NATJECANJE IZ FIZIKE
3. SKUPINA ZADATAKA
ŠKOLSKA GODINA 2024./2025.

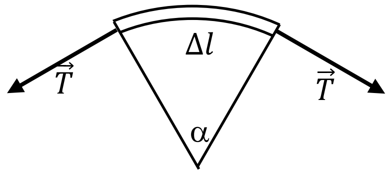
Upute za bodovanje: Ovdje je prikazan jedan način rješavanja zadataka. Ako učenici riješe zadatak na drugačiji, ali fizikalno pravilan način, treba im dati puni broj bodova predviđen za taj zadatak. Ako učenici ne napišu posebno svaki ovdje predviđeni korak, a vidljivo je da su ga napravili, treba im dati bodove kao da su ga napisali.

Zadatak 1. (10 bodova)

Električni generatori služe proizvodnji električne energije iz mehaničke, a sastoje se od zavojnice uronjene u promjenjivo magnetsko polje. Zavojnica (solenoid) pritom se napreže, zbog čega može doći do pucanja vodiča u njoj. Zavojnica je promjera 20 cm, a sastoji se od jednog sloja čvrsto namotanih bakrenih vodiča (žica) koji se međusobno dodiruju. Vodič zavojnice promjera je 1 mm, a električna otpornost bakra $1.68 \cdot 10^{-8}\ \Omega\mathrm{m}$. Sila napetosti pri kojoj neki materijal puca mjeri se tlačnim naprezanjem, odnosno silom napetosti po jedinici površine poprečnog presjeka pri kojoj će vodič puknuti, a koji za bakar iznosi 200 MPa. Magnetsko polje uvijek je usmjereno paralelno s osi zavojnice, a njegova promjena u vremenu prikazana je na slici dolje.

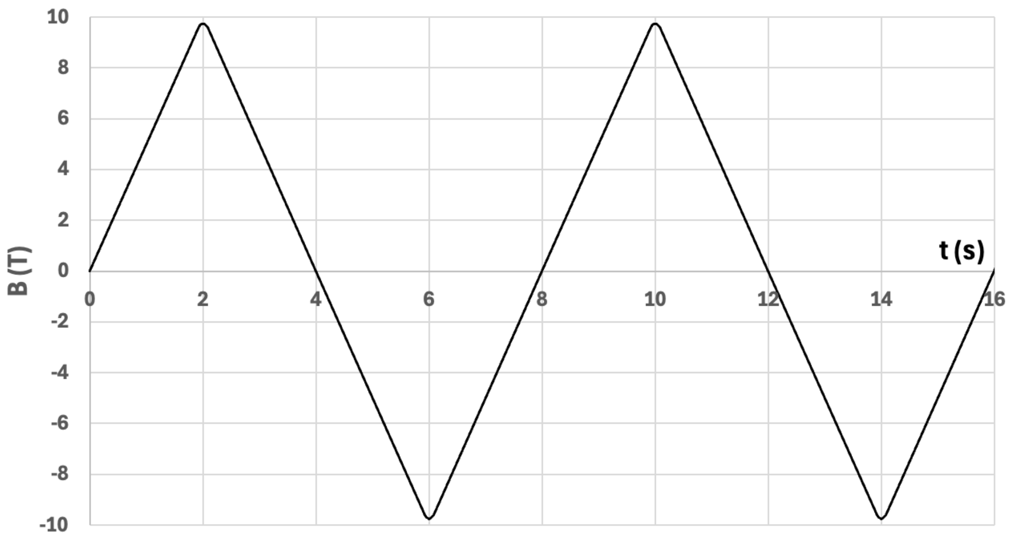
a) Odredite najveću struju u zavojnici koja bi potekla kada bismo krajeve zavojnice kratko spojili.

b) Odredite silu napetosti u bakrenom vodiču zavojnice pod a).
Uputa: Do sile napetosti dolazi zbog djelovanja Lorentzove sile na vodič. Sila napetosti uvijek je paralelna s vodičem. Promotrite djelovanje Lorentzove sile na segment vodiča duljine luka *l* koji razapinje kut α kako biste odredili silu napetosti. Promatrajte napetost za male kutove i male duljine luka te uzmite u obzir da je $\sin\alpha \approx \alpha$ za male kutove α



c) Odredite najveću silu napetosti u bakrenom vodiču pri kojoj će vodič puknuti. Hoće li pri navedenim uvjetima doći do pucanja vodiča u zavojnici?

Zanemarite sve rubne efekte. Funkcija koja opisuje ovisnost magnetskog polja o vremenu svugdje je glatka. Pretpostavite da se zavojnica nalazi u vakuumu.



Rješenje

Potrebno je uočiti da se u zavojnici s N navoja inducira elektromotorni napon uslijed promjene magnetskog toka:

$$U = N\frac{\Delta\Phi}{\Delta t}$$ 1 bod

Magnetski se tok u vremenu t mijenja kao (mijenja se samo iznos magnetskog polja):

$$\Phi(t) = B(t) \cdot A$$

Površine presjeka zavojnice kroz koju se mijenja magnetski tok:

$$A = \left(\frac{D}{2}\right)^2 \pi = 0.0314\ \mathrm{m}^2$$

Iz grafičkog prikaza $B(t)$ vidljivo je da će najveća promjena magnetskog polja u vremenu biti svugdje osim na vrhovima krivulje. Učenik može uzeti bilo koji vremenski interval u tom dijelu krivulje i odrediti promjenu magnetskog polja ΔB u vremenskom intervalu Δt. Vidljivo je da će maksimalna promjena biti:

$$\frac{\Delta \mathrm{B}}{\Delta \mathrm{t}} = 5\ \mathrm{T/s}$$ 1 bod

Odnosno:

$$\frac{\Delta\Phi}{\Delta \mathrm{t}} = \frac{\Delta \mathrm{B}}{\Delta \mathrm{t}} \cdot A = \frac{\Delta \mathrm{B}}{\Delta \mathrm{t}} \cdot \left(\frac{D}{2}\right)^2 \pi = 0.157\ \mathrm{Wb}$$

Najviši inducirani električni napon na krajevima zavojnice iznosi:

$$U = N\frac{\Delta\Phi}{\Delta t} = N\frac{\Delta \mathrm{B}}{\Delta \mathrm{t}} \cdot \left(\frac{D}{2}\right)^2 \pi$$

Induciranu struju odredimo iz Ohmova zakona poznavajući otpor bakrene žice površine poprečnog presjeka $S = \left(\frac{d}{2}\right)^2 \pi = 7.85 \cdot 10^{-7}\ \mathrm{m}^2$ i dužine *L*:

$$R = \rho\frac{L}{S}$$

Dužina žice u zavojnici jest umnožak opsega jednog zavoja i broja zavoja *N*:

$$L = 2\frac{D}{2}\pi \cdot N = D\pi N$$ 1 bod

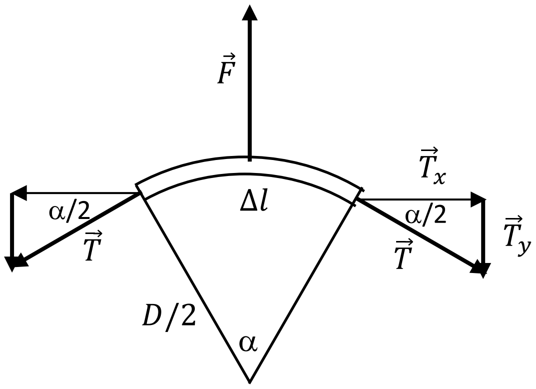
$$I = \frac{U}{R} = \frac{US}{\rho L}$$

$$I = \frac{N}{L} \cdot \frac{S}{\rho} \cdot \frac{\Delta \mathrm{B}}{\Delta \mathrm{t}} \cdot \left(\frac{D}{2}\right)^2 \pi = \frac{N}{D\pi N} \cdot \frac{(dD\pi)^2}{16\rho} \cdot \frac{\Delta \mathrm{B}}{\Delta \mathrm{t}}$$

$$I = \frac{d^2\pi D}{16\rho} \cdot \frac{\Delta \mathrm{B}}{\Delta \mathrm{t}} = 11.69\ \mathrm{A}$$ 1 bod

Iz grafa je vidljivo da je maksimalno magnetsko polje u zavojnici $B_{max} = 10\ \mathrm{T}$ što odgovara i maksimalno induciranoj struji *I*.

NAPOMENA: Priznati i ako učenik za maksimalnu magnetsko polje pri najvećoj vremenskoj promjeni magnetskog polja uzme i nešto niži iznos, između 9.5 i 10 T.



Magnetsko polje djeluje na segment žice duljine Δl Lorentzovom silom F (magnetsko polje okomito je na smjer struje, a Lorentzova sila okomita je na vodič):

$$F = BI\Delta l$$ 1 bod

Na gornjoj slici vidljiva je veza između sile napetosti žice i Lorentzove sile:

$$F = 2T_y$$

$$\sin\frac{\alpha}{2} = \frac{T_y}{T} = \frac{F}{2T}$$ 1 bod

Možemo izabrati proizvoljno mali segment luka žice Δl pa dobijemo ($\sin\alpha/2 \approx \alpha/2$):

$$T = \frac{F}{2\sin\alpha/2} \approx \frac{F}{2\,\alpha/2} = \frac{B_{max}I\Delta l}{\alpha}$$ 1 bod

Primijetimo da je kružni isječak:

$$\Delta l = \frac{D}{2}\alpha \quad \Rightarrow \quad \frac{\Delta l}{\alpha} = \frac{D}{2}$$ 1 bod

Konačno je sila napetosti žice:

$$T = \frac{B_{max}ID}{2} = 11.69\ \mathrm{N}$$ 1 bod

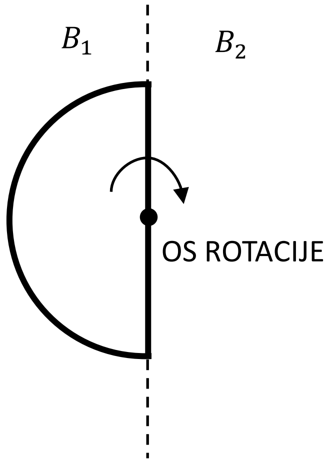
Maksimalna sila napetosti pri kojoj dolazi do pucanja žice iznosi:

$$T_{max} = \sigma S = \sigma\left(\frac{d}{2}\right)^2\pi = 157.08\ \mathrm{N}$$ 1 bod

S obzirom na to da je $T < T_{max}$, žica neće puknuti.

Zadatak 2. (10 bodova)
Polukružna vodljiva petlja okreće se oko osi koja je okomita na površinu petlje tako da opisuje kružnicu polumjera *r*. Petlja rotira konstantnom brzinom s periodom *P*. Petlja se nalazi u konstantnom magnetskom polju B_1 okomitom na površinu petlje (lijeva strana) te rotacijom ulazi u magnetsko polje B_2 istog smjera, ali tri puta manje jakosti u odnosu na B_1 (vidi sliku).

a) Odredite izraz za inducirani elektromotorni napon u petlji u ovisnosti o vremenu, magnetskom polju B_1, polumjeru *r* i periodu *P*.
b) Nacrtajte graf ovisnosti induciranog elektromotornog napona o vremenu u intervalu od početka rotacije petlje do povratka u početni položaj (petlja je rotirala puni krug) ako je petlja radijusa 50 cm i rotira s periodom 0.5 s. Magnetsko polje iznosi $B_1 = 2\ \mathrm{T}$.



Rješenje
U petlji se inducira elektromotorni napon kako se mijenja magnetski tok okretanjem polukružne petlje:

$$U = \frac{\Delta\Phi}{\Delta t}$$

Lijevi i desni prostor s magnetskim poljima $\vec{B}_1$ i $\vec{B}_2$ možemo promatrati odvojeno. Na početku gibanja u lijevom prostoru s magnetskim boljem B_1 dolazi do smanjenja toka magnetskog polja $\Delta\Phi_1$ u nekom vremenu Δt jer se smanjuje poprečni presjek petlje ΔS_1 u magnetskom polju B_1:

$$\Delta\Phi_1 = -B_1 \cdot \Delta S_1$$ 1 bod

Rotacijom petlje i ulaskom u područje magnetskog polja B_2 dolazi do povećanja toka magnetskog toka $\Delta\Phi_2$ u istom vremenu Δt uslijed povećanja poprečnog presjeka petlje ΔS_2 u magnetskom polju $B_2 = \frac{1}{3}B_1$:

$$\Delta\Phi_2 = B_2 \cdot \Delta S_2 = \frac{1}{3}B_1 \cdot \Delta S_2$$ 1 bod

Primijetimo da su promjene površine petlje u prostoru magnetskog polja B_1 i B_2 jednake:

$$\Delta S_1 = \Delta S_2 = \Delta S$$

Konačno, ukupna promjena toka magnetskog polja u vremenu Δt iznosi:

$$\Delta\Phi = \Delta\Phi_1 + \Delta\Phi_2 = -B_1 \cdot \Delta S_1 + \frac{1}{3}B_1 \cdot \Delta S_2 = -\frac{2}{3}B_1 \cdot \Delta S$$ 1 bod

Potrebno je još izračunati promjenu površine ΔS petlje koja izlazi iz područja magnetskog polja B_1 i ulazi u područje magnetskog polja B_2 u nekom vremenu Δt, opisujući pritom kut $\Delta\varphi$ i luk $\Delta l = r\Delta\varphi$:

$$\Delta S = \frac{\Delta l}{2r\pi} \cdot r^2\pi = r\Delta\varphi \cdot \frac{r}{2} = \frac{r^2\Delta\varphi}{2}$$ 1 bod

Promjena površine ΔS u vremenu Δt iznosi:

$$\frac{\Delta S}{\Delta t} = \frac{r^2}{2} \cdot \frac{\Delta\varphi}{\Delta t}$$

U vremenu jednog perioda $\Delta t = P$ rotacije petlja se vrati u početni položaj, odnosno napravi puni krug $\Delta\varphi = 2\pi$, pa je

$$\frac{\Delta\varphi}{\Delta t} = \frac{2\pi}{P}$$

Konačno:

$$\frac{\Delta S}{\Delta t} = \frac{r^2}{2} \cdot \frac{2\pi}{P} = \frac{r^2\pi}{P}$$ 1 bod

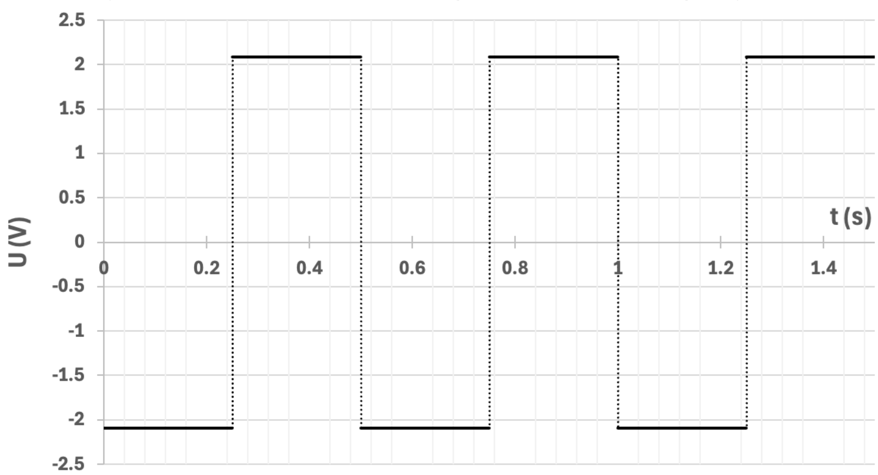
Inducirani elektromagnetni napon iznosi:

$$U = \frac{\Delta\Phi}{\Delta t} = -\frac{2}{3}B_1 \cdot \frac{\Delta S}{\Delta t} = \frac{2B_1 r^2\pi}{3P}$$ 1 bod

U prvoj poluperiodi magnetski tok rotacijom opada jer se polupetlja rotira iz područja većeg u područje manje okomite komponente magnetskog polja. U drugoj će poluperiodi magnetski tok rasti. Potrebno je uočiti da su inducirani elektromotorni naponi u objema poluperiodama po iznosu jednaki, ali suprotnog predznaka:

$$U = -\frac{2B_1 r^2\pi}{3P} = -2.09\ \text{V} \ \text{ za } 0 < t < \frac{P}{2}$$
$$U = \frac{2B_1 r^2\pi}{3P} = 2.09\ \text{V} \ \text{ za } \frac{P}{2} < t < P$$ 1 bod

Grafički prikaz ovisnosti induciranog elektromotornog napona o vremenu:



Ispravno ucrtana vremena promjene induciranog elektromotornog napona	1 bod
Ispravno ucrtan oblik induciranog elektromotornog napona (konstantne vrijednosti)	1 bod
Ispravno ucrtani iznosi i predznaci induciranog elektromotornog napona	1 bod

NAPOMENA: Rezultat za inducirani elektromotorni napon (numerički rezultat i grafički prikaz) potrebno je uvažiti bez obzira na predznak, no nužno je da učenik primijeti da inducirani elektromotorni napon mijenja predznak svakih pola periode.

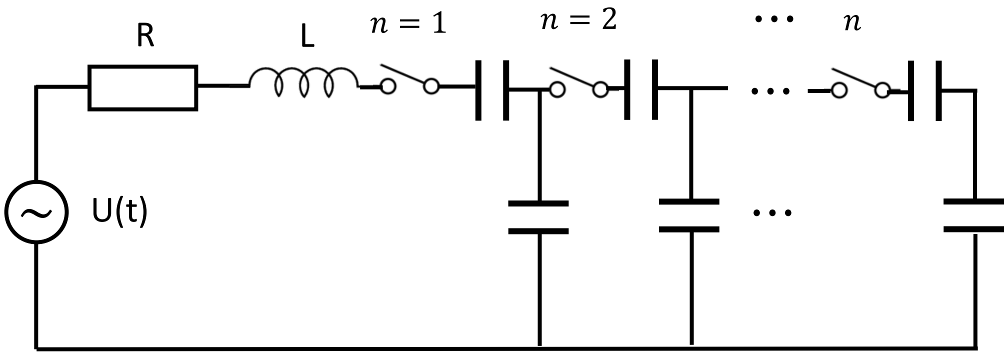
Zadatak 3. (10 bodova)

Serijski krug RLC spojen je na izvor izmjeničnog napona U(t) kako je prikazano na donjoj slici. Svi su kondenzatori istog kapaciteta koji iznosi 50 μF. Omski otpor iznosi 60 Ω, dok je induktivitet zavojnice 330 mH.

a) U kapacitivnom dijelu kruga spojeni su kondenzatori u nizu s *n* sklopki kako je prikazano na slici. Usporedite ukupni kapacitet kapacitivnog dijela kruga u slučajevima kada prvo zatvorimo sklopku $n = 1$, zatim i sklopku $n = 2$, pa $n = 3$ i na kraju sklopku $n = 4$. U kojim je slučajevima međusobna razlika kapaciteta manja od 1 %?

b) Za $n = 3$ zatvorenih sklopki odredite impedanciju cijelog sklopa RLC ako je sklop spojen na izvor izmjeničnog napona frekvencije 100 Hz.

c) Za $n = 3$ zatvorenih sklopki odredite rezonantnu frekvenciju sklopa.



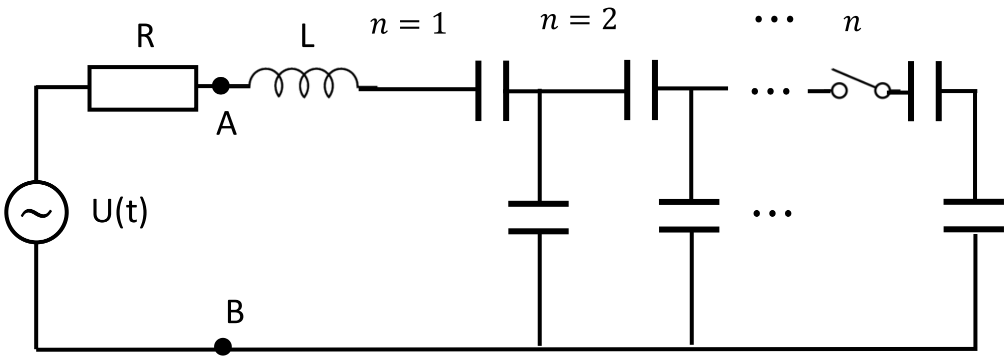
Rješenje

Elektronička shema predstavlja serijski spojeni krug RLC. Kako je vidljivo, kada se zatvori prva sklopka ($n = 1$), u krug se priključuju dva serijski spojena kondenzatora. Njihov je ekvivalentni kapacitet:

$$\frac{1}{C_1} = \frac{1}{C} + \frac{1}{C} = \frac{2}{C}$$

$$C_1 = \frac{C}{2} = 0.5\ C \qquad \text{1 bod}$$

Kada se uključi druga sklopka, sklop izgleda ovako:



Desna dva kondenzatora spojena su serijski pa im je ekvivalentni kapacitet jednak C_1. Oni su pak spojeni paralelno s kondenzatorom C, pa serijski s drugim kondenzatorom C. Ekvivalentni je otpor sada:

$$\frac{1}{C_2} = \frac{1}{C} + \frac{1}{C_1 + C} = \frac{1}{C} + \frac{1}{\frac{C}{2} + C} = \frac{1}{C} + \frac{2}{3C} = \frac{5}{3C} \qquad \text{1 bod}$$

$$C_2 = \frac{3}{5} C = 0.6C \qquad \text{1 bod}$$

Sada možemo nastaviti niz zatvaranja sklopki i uključivanja po dva serijski spojena kondenzatora u ostatak kruga. Za $n = 3$ zatvorenu sklopku imamo ekvivalentni kapacitet:

$$\frac{1}{C_3} = \frac{1}{C} + \frac{1}{C_2 + C} = \frac{1}{C} + \frac{5}{8C} = \frac{13}{8C}$$

$$C_3 = \frac{8}{13} C = 0.615C \qquad \text{1 bod}$$

Za proizvoljan broj zatvorenih sklopki *n* imamo rekurzivnu jednadžbu:

$$\frac{1}{C_n} = \frac{1}{C} + \frac{1}{C_{n-1} + C}$$

Vidimo da su kapaciteti C_3 i C_2 već bliski, pa odredimo još i za $n = 4$:

$$\frac{1}{C_4} = \frac{1}{C} + \frac{1}{C_3 + C} = \frac{1}{C} + \frac{13}{21C} = \frac{34}{21C}$$

$$C_4 = \frac{21}{34} C = 0.6176C \qquad \text{1 bod}$$

Vidimo da je odstupanje:

$$\frac{C_4 - C_3}{C_3} \cdot 100 = 0.37\%$$ 1 bod

Možemo stoga zaključiti da je ekvivalentni kapacitet s $n > 3$ zatvoreniih sklopki jednak ekvivalentnom kapacitetu s $n = 3$ zatvorenih sklopki do na 1 %. Dalje ćemo računati s ekvivalentnim kapacitetom za $n = 3$ zatvorenih sklopki:

$$C_3 = \frac{8}{13} C = 0.615C = 30.77\ \mu\mathrm{F}$$ 1 bod

Impedancija sklopa iznosi:

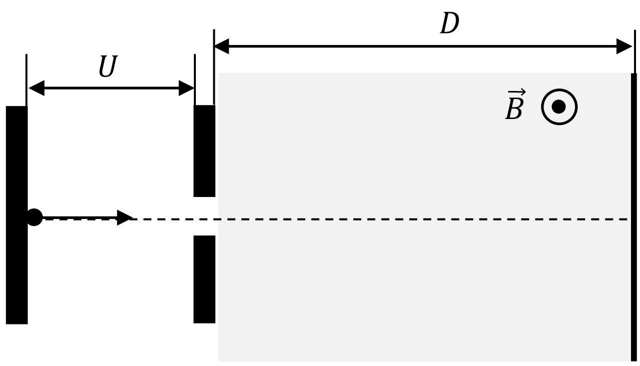
$$|Z| = \sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C_3}\right)^2} = |Z| = \sqrt{R^2 + \left(2\pi f L - \frac{1}{2\pi f C_3}\right)^2} = 166.79\ \Omega$$ 2 boda

Do rezonancije dolazi kada je impedancija najmanja, odnosno za frekvencije napona izvora kada ukupna impedancija postaje $|Z| = R$:

$$\omega L - \frac{1}{\omega C_3} = 0 \quad \Longrightarrow \quad \omega = \frac{1}{\sqrt{LC_3}}$$

$$f_0 = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC_3}} = 49.95\ \mathrm{Hz}\ \approx 50\ \mathrm{Hz}$$ 1 bod

Zadatak 4. (10 bodova)
Maseni spektrometar jest uređaj koji s pomoću magnetskog polja može razdvojiti čestice u ovisnosti o omjeru njihove mase i naboja. Nabijena se čestica prvo ubrzava iz stanja mirovanja u homogenom električnom polju s razlikom potencijala $U = 1000\ \mathrm{V}$, nakon čega uleti u prostor u kojemu djeluje magnetsko polje. Magnetsko polje okomito je na upadni smjer brzine čestice, te izlazi iz površine papira. Takvo magnetsko polje uzrokuje otklon nabijene čestice. Magnetsko polje naizmjence se pali i gasi, i to tako da se upali u trenutku ulaska čestice u magnetsko polje. Upaljeno magnetsko polje uvijek je istog iznosa $B = 1\ \mathrm{mT}$ i smjera. Polje je upaljeno $t_0 = 1\ \mu\mathrm{s}$, jednako dugo koliko je ugašeno. Česticu možemo detektirati kada udari u fluorescentni zastor postavljen okomito na smjer upadne čestice na udaljenosti $D = 1.5\ \mathrm{m}$. Odredite mjesto udara protona u zastor u odnosu na mjesto udara kada bi magnetsko polje bilo u potpunosti isključeno.
UPUTE: Prvo izračunajte položaj protona kada je po prvi put upaljeno magnetsko polje. Ako proton nije udario u zaslon u trenutku kada se polje ugasilo, izračunajte položaj protona u intervalu s ugašenim poljem i provjerite je li dosegnuo zaslon. Ako nije, izračunajte položaj protona u intervalu s ponovno upaljenim poljem, provjerite je li udarilo u zaslon itd., sve dok proton ne dosegne zaslon.



Rješenje

Proton se ubrzava u električnom polju s razlikom potencijala *U* te na izlazu iz električnog polja ima brzinu *v*. Čestica naboja *q* dobiva kinetičku energiju:

$$E_K = qU$$

S obzirom na to da je kinetička energija čestice mase *m*:

$$E_K = \frac{mv^2}{2}$$

dobijemo za brzinu protona mase $m = 1.67 \cdot 10^{-27}$ kg na izlazu iz električnog polja, odnosno na ulazu u magnetsko polje:

$$v = \sqrt{\frac{2qU}{m}} = 4.377 \cdot 10^5 \text{ m/s}$$ 1 bod

Početni smjer brzine protona okomit je na magnetsko polje i na fluorescentni zaslon te će Lorentzova sila djelovati u ravnini papira i okomito na smjer brzine. Čestica će se stoga gibati po kružnici polumjera *R* dok god je uključeno magnetsko polje.

Lorentzova sila $q \cdot v \cdot B$ djeluje kao centripetalna sila $\frac{mv^2}{R}$, a čestica izvodi kružno gibanje:

$$\frac{mv^2}{R} = qvB$$

$$R = \frac{mv}{qB} = \frac{m}{qB}\sqrt{\frac{2qU}{m}} = \frac{1}{B}\sqrt{\frac{2mU}{q}} = 4.57 \text{ m}$$ 1 bod

Pri uključenom magnetskom polju u vremenu $t_0 = 1$ μs čestica kruži brzinom *v* po kružnici i prelazi put *l* koji je ujedno i luk kružnice razapet kutom α:

$$v = \frac{l}{t_0} \quad \Longrightarrow \quad l = vt_0$$

$$l = \alpha R \quad \Longrightarrow \quad \alpha = \frac{vt_0}{R} = 0.0958 \text{ rad}$$ 1 bod

Nakon što je čestica prešla luk *l* po kružnici, gasi se magnetsko polje i čestica nastavlja jednoliko gibanje duž pravca brzinom *v* (vidi sliku).

Postavimo li koordinatni sustav tako da se ishodište nalazi na mjestu ulaska čestice u magnetsko polje, možemo odrediti položaj čestice *x* i *y*:

$$x = R\sin\alpha = 0.437 \text{ m}$$

$$y = R\cos\alpha - R = R(\cos\alpha - 1) = -0.02095 \text{ m}$$ 1 bod

Kako bismo odredili daljnje ponašanje čestice koja se giba jednoliko duž pravca, treba odrediti i komponente brzine:

$$v_x = v\cos\alpha$$

$$v_y = v\sin\alpha$$

Gibajući se ovim brzinama, čestica je prešla put Δx i Δy za vrijeme dok je magnetsko polje ugašeno:

$$\Delta x = v_x \cdot t_0 = vt_0\cos\alpha$$

$$\Delta y = -v_y \cdot t_0 = -vt_0\sin\alpha$$ 1 bod

Položaj čestica nakon ukupno $2t_0$ vremena kada se magnetsko polje opet pali:

$$x' = x + \Delta x = R\sin\alpha + vt_0\cos\alpha = 0.8728 \text{ m}$$

$$y' = y + \Delta y = R(\cos\alpha - 1) - vt_0\sin\alpha = -0.0628 \text{ m}$$ 1 bod

Nakon ponovnog paljenja magnetskog polja, čestica se nastavlja gibati po kružnici te, nakon što je magnetsko polje bilo upaljeno t_0 vremena (trenutak $t = 3t_0$), položaj čestice bit će:

$$x'' = R\sin 2\alpha + vt_0\cos\alpha = 1.3058\ \mathrm{m}$$
$$y'' = R(\cos 2\alpha - 1) - vt_0\sin\alpha = -0.1255\ \mathrm{m}$$ 1 bod

Primijetite da je gibanje ekvivalentno gibanju po kružnici za kut 2α dok je magnetsko polje upaljeno zbrojeno s pravocrtnim gibanjem dok je magnetsko polje ugašeno.

Potrebno je analogno izračunati komponente brzina za pravocrtni dio gibanja nakon što je čestica prešla luk $2l$ razapet kutom 2α:

$$v_x'' = v\cos 2\alpha$$
$$v_y'' = v\sin 2\alpha$$

Dijelovi puta dok je magnetsko polje ugašeno:

$$\Delta x'' = v_x''\cdot t_0 = vt_0\cos 2\alpha$$
$$\Delta y'' = -v_y''\cdot t_0 = -vt_0\sin 2\alpha$$ 1 bod

Položaj čestica nakon ukupno $4t_0$ vremena, kada se magnetsko polje opet pali:

$$x''' = x'' + \Delta x'' = R\sin 2\alpha + vt_0\cos\alpha + vt_0\cos 2\alpha = 1.7355\ \mathrm{m}$$
$$y''' = y'' + \Delta y'' = R(\cos 2\alpha - 1) - vt_0\sin\alpha - vt_0\sin 2\alpha = -0.20885\ \mathrm{m}$$ 1 bod

Dalje nije potrebno računati jer vidimo da je čestica pogodila zaslon:

$$x''' > D$$

Potrebno je još izračunati točan položaj $y = y_T$ u kojemu je čestica pogodila zaslon za $x = D$. To je moguće učiniti na više načina:

1. Koristeći razmjere s obzirom na to da se u posljednjem dijelu čestica giba pravocrtno:

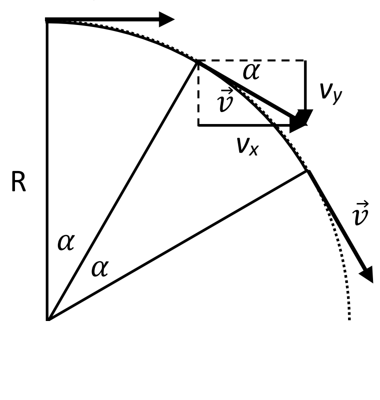
$$\frac{x''' - x''}{y''' - y''} = \frac{D - x''}{y_T - y''}$$
$$y_T = y'' + \frac{D - x''}{x''' - x''}(y''' - y'') = -0.1631\ \mathrm{m}$$ 1 bod

2. Koristeći se brzinama tako da se odredi vrijeme udara t_T čestice u zaslon, a iz toga mjesto udara:

$$\Delta x_T = v_x\cdot t_T = vt_T\cos 2\alpha$$
$$\Delta x_T = D - x'' = 0.1942\ \mathrm{m}$$
$$t_T = \frac{\Delta x_T}{v\cos 2\alpha} = 0.451\ \mu\mathrm{s}$$

Konačno:

$$y_T = y'' - vt_T\sin 2\alpha = -0.1631\ \mathrm{m}$$ 1 bod



Zadatak 5. (10 bodova)
Hidrometar je jednostavan uređaj za mjerenje gustoće tekućina. Sastoji se od uske cilindrične cijevi polumjera $r = 4\ \mathrm{mm}$ potpuno ispunjene tekućinom mase $m = 10\ \mathrm{g}$. U ravnotežnom stanju cijev je uronjena u tekućinu i miruje u uspravnom položaju. Dužina cilindrične cijevi od $l = 30\ \mathrm{cm}$ dovoljno je velika da se jedan dio uvijek nalazi ispod, a drugi dio iznad površine tekućine. Ako malo pomaknemo cijev vertikalno prema dolje, njezin će položaj početi oscilirati. Ako ste izmjerili period oscilacija $T = 0.9\ \mathrm{s}$, odredite gustoću tekućine. Zanemarite viskoznost tekućine.

Rješenje
Napomena: Iako konačan rezultat ne ovisi o zadanoj duljini cijevi $l = 30\ \mathrm{cm}$, ona je zadana dovoljno velika kako bi se osiguralo da se jedan dio uvijek nalazi ispod, a drugi dio iznad površine tekućine.
Na cijev uronjenu u tekućinu djeluju dvije sile:

1. sila teže koja je usmjerena uvijek vertikalno prema dolje:
$$G = mg$$ 1 bod
2. sila uzgona koja je usmjerena uvijek vertikalno prema gore:
$$F_u = \rho g V_u$$ 1 bod
Gdje je V_u uronjeni volumen tijela u tekućinu

Ako je hidrometar uronjen do visine *h*, tada je uronjeni volumen:
$$V_u = r^2 \pi h$$
U ravnotežnom stanju, hidrometar je uronjen do visine h_0:
$$V_{u0} = r^2 \pi h_0$$ 1 bod
Kada hidrometar miruje, sila teža uravnotežena je silom uzgona:
$$G = F_{u0}$$ 1 bod
$$mg = \rho g r^2 \pi h_0$$
Potopimo li hidrometar za dužinu Δh, sila uzgona poveća se zbog čega postoji rezultantna sila koja pomiče hidrometar prema gore (minus označava da je smjer sile uzgona suprotan od smjera pomaka):
$$F_u = (-)\rho g r^2 \pi (h_0 + \Delta h) > F_{u0} = G$$
Pomaknemo li hidrometar prema površini za dužinu Δh, sila uzgona smanji se zbog čega postoji rezultantna sila koja pomiče hidrometar prema dolje:
$$F_u = (-)\rho g r^2 \pi (h_0 - \Delta h) < F_{u0} = G$$ 1 bod
Zadatak možemo riješiti analogijom s oprugom i elastičnom silom, gdje na isti način na tijelo obješeno o oprugu djeluje sila teža i elastična sila F_{el}:
$$F_{el} = -k(x_0 + \Delta \mathrm{x})$$ 1 bod
gdje je elastična sila uvijek u suprotnom smjeru od pomaka, baš kao i kod sile uzgona.
Analogijom između sile uzgona i elastične sile možemo identificirati $k \equiv \rho g r^2 \pi$

Period elastične opruge iznosi:
$$T_{el} = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}}$$ 1 bod

Period hidrometra bit će:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{\rho g r^2 \pi}} = \sqrt{\frac{4\pi m}{\rho g r^2}}$$ 2 boda

Gustoća tekućine iznosi:

$$\rho = \frac{4\pi m}{T^2 g r^2} = 988.41\ \mathrm{kg/m^3}$$ 1 bod

NAPOMENA: Učenik može riješiti zadatak i s pomoću jednadžbe gibanja koju identificira s jednadžbom harmonijskog oscilatora. Ovaj postupak treba jednako priznati

$$F_R = G - F_u$$ 1 bod

$$am = mg - \rho g r^2 \pi (h_0 + \Delta h)$$ 1 bod

$$am = mg - \rho g r^2 \pi h_0 - \rho g r^2 \pi \Delta h$$ 1 bod

Iz ravnotežnog uvjeta $mg = \rho g r^2 \pi h_0$: 1 bod

$$am = mg - mg - \rho g r^2 \pi \Delta h = -\rho g r^2 \pi \Delta h$$ 1 bod

$$a = -\frac{\rho g r^2 \pi}{m} \Delta h = -\omega^2 \Delta h$$ 2 bod

što je jednadžba harmonijskog oscilatora s rješenjem:

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{\rho g r^2 \pi}}$$ 2 bod

$$\rho = \frac{4\pi m}{T^2 g r^2} = 988.41\ \mathrm{kg/m^3}$$ 1 bod